Emro Science and Education
International open-access scientific journal
Journal homepage: https://journal.emro.uz

OPEN ACCESS

CONFERENCE PAPER OPEN ACCESS

Vol. 1 No. 1 (2023) · "Axborot oqimlari va intellektual tizimlarning ijtimoiy, iqtisodiy va texnik-texnol... DOI: 10.5281/zenodo.24318477

materiallar to'plami

TALABALARDA KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRALI VA UNI HISOBLASH USULLARINI SHAKLLANTIRISH.

Mamasidikov Baxodir Qobuljon o'g'li, Andijon mashinasozlik instituti stajor o'qituvchisi

Anontatsiya: Kompleks o'zgaruvchili funksiya va uning integrali, Koshining integral formulalari va shunga doir misollar.

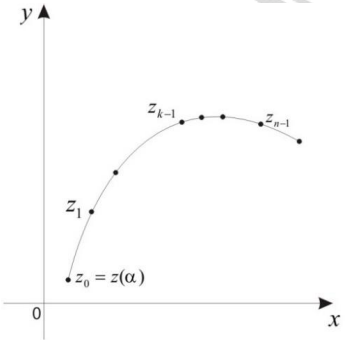
Kalit so'zlar: Ta'rif, teorema, isbot keltirilgan , Koshi teoremalari, Koshi formulalari keltirilgan.

Annotation: Complex variable function and its integral, Koshi's integral formulas and related examples.

Key words: Definition, theorem, proof, given, Koshi's theorems, Koshi's formulas.

Prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev o'z ma'ruzalarida "Matematika hamma aniq fanlarga asos.Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli bo'lib o'sadi,istalgan sohada muvoffaqiyatli ishlab ketadi" [1] degan fikrni keltirib o'tgan. Ma'lumki, fan va texnika jadal sur'atlar bilan rivojlanayotgan bugungi kunda ilmiy bilimlar, tushuncha va tasavvurlar hajmi keskin ortib bormoqda. Bu bir tomondan, fan-texnikaning yangi soha va bo'limlarining taraqqiy etishi tufayli uning differensiallashuvini ta'minlayotgan bo'lsa, fanlar orasida integratsiya jarayonini vujudga keltirmoqda. Shu sabab biz O'zbekiston Respublikasi kelajagi yoshlarni matematika faniga o'rgatishimiz dolzarb masala bo'lib hisoblanadi. Mamlakatimizda matematika 2022-yildagi ilm-fanni rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlaridan biri sifatida belgilandi. O'tgan davr ichida matematika ilm-fani va ta'limini yangi sifat bosqichiga chiqishga qaratilgan tizimli ishlar olib borildi. [2] Kompleks sonlar mavzusi bizga maktab matematika kursidan tanish hisoblanadi. Bu mavzuni oliy ta'lim muassasalarida alohida fan sifatida ham o'qitiladi. Bu soha texnikada,ishlab chiqarishning ko'plab sohalarida g'oyat keng qo'llanishga ega. Uchbu kompleks o'zgaruvchili funksiyaning integrali va uning hisoblash mavzusiga ma'lumotlar keltirib o'tamiz.

Kompleks (z) tekislikdagi E sohada uzluksiz bir qiymatli $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (1.1) funksiya berilgan bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiya E dan olingan ixtiyoriy $\tilde{A}$ silliq chiziqda ham bir qiymatli bo'ladi. $\tilde{A}$ chiziqning teglamasi $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ bo'lib, $z_0 = z(\alpha)$ boshlang'ich, $z = z(\beta)$ oxirgi nuqtasi bo'lsin. $\tilde{A}$ dagi t ning o'sishiga mos yo'nalish musbat, t ning qiymatiga mos yo'nalish manfiy yo'nalish deb qabul qilinadi ya'ni $\overleftarrow{\Gamma}$.



Agar egri chiziq chekli sondagi silliq chiziqlardan tashkil topgan bo'lsa, uni bo'laklari silliq chiziq deyiladi.

Γ silliq z_0, z_1, z_2, … , $z_n = z$ (1.2) nuqtalar orqali ixtiyoriy n ta yoychalarga bo'lamiz (12-chizma) va shu yoychalardan har birini istalgan joyidan bittadan nuqta

Published: 10.11.2023

Cite this article: Mamasidikov Baxodir Qobuljon o'g'li (2023). Talabalarda kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integrali va uni hisoblash usullarini shakllantirish. Emro Science and Education, 1(1). https://doi.org/10.5281/zenodo.24318477

© 2023 The Author(s). Published by Emro Science and Education. This is an open access article.

olib, bu nuqtalarni mos ravishda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ..., \xi_n$ (1.3) deb belgilaymiz

Ushbu yig'indini tuzamiz: $s_n = f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + ... + f(\xi_k)\Delta z_k + ... + f(\xi_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ (1.4) integral yig'indiga integral yig'indi deyiladi. Bunda $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ $k = \overline{0,n}$

Agar biz (1.2) nuqtalarni ketma-ket to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirsak, Γ egri chiziq ichiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. Mana shu siniq chiziqlarning ya'ni vatarlarning eng kattasi δ nolga intilganda n cheksizlikka intiladi.

Ta'rif. Agar $\delta \to 0$ da (1.4) integral yig'indi $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ va $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ nuqtalar Γ chiziqning qaysi joylaridan olinganiga bog'liq bo'lmay, aniq bir chekli limitga intilsa, shu limit $f(z)$ funksiyadan Γ chiziq bo'ylab olingan integral deyiladi va quyidagicha yoziladi: $\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ (1.5).

Γ chiziq integrallash yo'li yoki konturi deyiladi.

Ba'zan (1.5) integralni (1.1) ga asoslanib: $\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy) = \int_{\Gamma} udx - vdy + i\int_{\Gamma} vdx + idy$ (1.6) ko'rinishda yozish qulay. (1.6) tenglikning o'ng tomoni haqiqiy argumentli funksiyalardan olingan egri chiziqli integrallardan iborat.

1-misol. (1.6) formuladan va II tur egri chiziqli integralni echish qoidasidan foydalanib $\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz$ integralni hisoblang, bunda Γ chiziq soat strelkasiga teskari yo'nalgan $|z| = 1$ aylananing yuqori yarmi.

Yechish: $|z| = 1$ aylananing parametrik tenglamasi $x = \cos t, y = \sin t$ $0 \le t \le \pi$ va $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1;\ dx = -\sin t dt,\ dy = \cos t dt;$ larni hisobga olsak:

$\int_{\Gamma} |z| \cdot \bar{z}dz = \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)dt + i\int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \pi i.$

A gar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli E sohada analitik bo'lsa , $z_1, z_2 \in E$ nuqtalar uchun $\int_{Z_1}^{Z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{Z_1}^{Z_2}$ (2.2) N`yuton-Leybnits formula o'rinli bo'ladi, bunda $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasidir, ya'ni $F'(z) = f(z)$.

Haqiqiy matematik analizdagi kabi, agar $f(z)$ va $\varphi(z)$ funksiyalar bir bog'lamli E sohada analitik funksiyalar bo'lib, $z_{1)} z_2 \in E$ nuqtalar uchun $\int_{z_,}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = [f(z)\varphi(z)]\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f'(z)dz$ (2.3) bo'laklab integrllash formulasi o'rinlidir.

2-misol. $\int_{\Gamma} (z\bar{z} + z^2)dz$ integralni $\Gamma : |z| = 1$ aylananing yuqori yarmi bo'yicha hisoblang.

Yechish.

$|z|=1, \alpha=0, \beta=\pi, z=x+iy, \bar{z}=x-iy, z=e^{i\varphi}, \bar{z}=e^{-iy}, z\cdot\bar{z}+z^2=e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}+e^{2i\varphi}, dz=ie^{i\varphi}d\varphi.$

$$\int_\Gamma (z\bar{z}\cdot z^2)dz = i\int_0^\pi (1+e^{i2\varphi})e^{i\varphi}d\varphi = \int_0^\pi (1+e^{i2\varphi})e^{i\varphi}d(i\varphi) = (e^{i\varphi}+\frac{1}{3}e^{i3\varphi})\Big|_0^\pi = e^{i\pi}-1+\frac{1}{3}e^{3\pi i}-\frac{1}{3}=$$

$$-1-1+\frac{1}{3}(-1)-\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}.$$

Analitik funksiyalar

Ta’rif. Agar $w=f(z)$ funksiya E sohaning z_0 nuqtasida va uning atrofida ham differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada analitik deyiladi.

Demak, funksiya biror nuqtada monogen bo‘lishidan, uning shu nuqtada analitik bo‘lishi kelib chiqmaydi.

Ta’rif. Agar $f(z)$ funksiya E sohaning barcha nuqtalarida hosilaga ega bo‘lsa, u funksiya E da **analitik** deyiladi.

Ta’rif. $f(z)$ funksiya analitik bo‘lgan nuqtalar uning to‘g‘ri nuqtasi, analitik bo‘lmagan nuqtalar esa maxsus nuqtalar deyiladi.

16-misol $w=x^2+y^2+ixy^3$ funksiyaning analitik yoki analitik emasligini tekshirilsin.

Yechish: $u(x,y)=x^2+y^2,\quad v(x,y)=xy^3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y, \frac{\partial v}{\partial y}=y^3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3xy^2,$

$$2x=3xy^2 \Rightarrow x(2-3y^2)=0 \Rightarrow x=0, y=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y^3=-2y \Rightarrow y(y^2+2)=0 \Rightarrow y=0$$

Demak, faqat (0;0) dagina hosila mavjud, boshqa nuqtada hosila yo‘q, ya’ni funksiya analitik emas, $0(0;0)$ – monogen nuqta.

Natija. Integrallash sohasi ko‘p bog‘lamli bo‘lsa, analitik funksiyadan tashqi kontur bo‘yicha olingan integral ichki konturlar bo‘yicha olingan integrallar yig‘indisiga teng (konturlar hammasi soat strelkasiga teskari yo‘nalishda).

2. Koshi formulalari.

Yopiq E sohada analitik $f(z)$ funksiya berilgan bo‘lsin, sohaning konturini Γ deylik. Funksiyaning konturdagi qiymatlari bo‘yicha kontur ichidagi qiymatlarini aniqlash mumkin. Bu $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$ (3.1) ko‘rinishdagi **Koshi formulasiga** asosan topiladi.

(3.1) tenglik misollar echishda quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi = 2\pi i f(z_0) \qquad (3.2)$$

Misol. $\int_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2+2z}=\int_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z(2+2)}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{e^z}{z+2}}{z-0}dz=2\pi i\cdot f(z_0)=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i.$

$f(z)=\frac{e^z}{z+2} \Rightarrow f(0)=\frac{e^0}{0+2}=\frac{1}{2}$, bunda $z_0=0$

Javob: πi .

Agar kompleks o‘zgaruvchi Z ning bir qiyimatli f (z)funksiyasi E sonning hamma nuqtasida birinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsa, u holda funksiya bu sohada istalgan yuqori tartibli hosilaga ega bo‘ladi.

Koshi formulasi uchun esa: $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ (3.3) formula o‘rinli.

(3.3) ni misol echishda qulay bo‘lishi uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) \quad (3.4)$$

Misol: $\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(z_0)=-\pi i.$

$z_0=0,\ f(z)=\cos z,\ f'(z)=-\sin z,\ f''(z)=-\cos z,\ f''(0)=-1$. Javob: $-\pi i$

Tadqiqot mavzusi bo‘yicha adabiyotlarni sharhlash. Ta’limda informatsionkommunikatsion texnologiyalarini kiritish va uning natijadorligini oshirishning pedagogik shart-sharoitlarini, elektron ta’limni rivojlantirish, elektron informatsionta’lim resurslari va dasturiy qobiqlarini yaratish va qo‘llash imkoniyatiga ega mamlakatimiz va chet el olimlari A.Abduqodirov, A.Abdullayev, M.Baltayeva, V.Vergasov, P.Galperin, V.Hamidov, S.Godnik, M.Atamirzayev, N.Muslimov, B.Rahimov, M.Salayeva, N.Sadıqova, D,Tólegenova, M.Quyashiyev, Sh. Sharıpov, B.B.Prenov va boshqalar mehnatlari o‘rganildi.

Xulosa: Yuqoridagilardan xulosa qilib shuni aytish mumkinki kompleks o'zgaruvchili funksiyaning integrali mavzusini o`qitishda “Kompleks sonlar nazariyasi” mavzusidan foydalanish samarali natija beribgina qolmasdan yo‘nalish talabalariga qulayliklar yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. O‘zbekiston respublikasi prezidentining “2022 - 2026 yillarga mo‘ljallangan yangi o‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasini «Insonga e’tibor va sifatli ta’lim yili»da amalga oshirishga oid davlat dasturi to‘g‘risidagi” farmoni 28.02.2023 yildagi PF-27-son.
2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021 yil 17 fevraldagi "Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi PQ-4996-son qarori.
3. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I.Springer-Verlag Italia, Milan -2008.
4. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1, 2 часть-Харков: НТУ «ХПИ», -2003. -408 с.
5. Axmedov A.B., Shodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., Shamsiyev D.N.: Oliy matematikadan individual topshiriqlar. 1-qism, O‘quv qo‘llanma. Toshkent. O‘zbekiston ensiklopediyasi. -2014.

6. Axmedov A.B., Shodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., Shamsiyev D.N.: Oliy matematikadan individual topshiriqlar. 2-qism, O‘quv qo‘llanma. Toshkent, “Sano standart” -2018.
7. Y. Soatov Oliy matematika. 1,2,3-jild. T.:”O‘qituvchi”, 1992/1994/1996.

8. Juraev.T.J., Xudoyberganov.R.X., Mansurov.X. Oliy matematika asoslari. 1 va 2 qism. Darslik. O‘zbekiston. 1995/1999.

9. Берман.Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Ўқув қўлланма” Санкт-Петербург, Профессия. -2001.

ANDIJON MASHINASOZLIK INSTITUTI
IB&KT
FAKULTETI
2022